

Ball-preserving mappings of finite ultrametric spaces

E. Petrov

It is shown that the rooted trees T_X and T_Y representing finite ultrametric spaces X and Y are isomorphic if and only if there exists a ball-preserving bijection $F : X \rightarrow Y$.

Keywords: finite ultrametric space, finite rooted tree, ball-preserving mapping, ballean.

2010 MSC: 54E35.

Сохраняющие шары отображения конечных ультраметрических пространств

Е.А. Петров

Аннотация

Показано, что корневые представляющие деревья T_X и T_Y конечных ультраметрических пространств X и Y изоморфны тогда и только тогда, когда существует сохраняющая шары биекция $F : X \rightarrow Y$.

Ключевые слова: конечное ультраметрическое пространство, конечное корневое дерево, сохраняющее шары отображение, баллеан.

1 Введение

В 2001 году на семинаре Workshop on General Algebra (см. [1]) внимание специалистов по теории решёток было обращено на следующую задачу И.М. Гельфанда. *Используя теорию графов, описать с точностью до изометрии все конечные ультраметрические пространства.* В [2] была доказана теорема про изоморфизм категории ультраметрических пространств и категории полных, атомных, древовидных, градуированных действительными числами решеток. В работе [3] взвешенный оргграф определял квазиультраметрическое конечное пространство, а в симметричном случае авторы получали “каноническое представление” конечных ультраметрических пространств с использованием взвешенных корневых деревьев, причём эти деревья были изоморфны как корневые взвешенные графы тогда и только тогда, когда соответствующие им ультраметрические пространства были изометричными.

Каноническое представление из [3] можно, в определённом смысле, считать решением упомянутой выше задачи И.М. Гельфанда. Естественно возникает вопрос о применении полученного представления в исследовании ультраметрических пространств. В связи с этим заметим, что в последнее время началось изучение боллеанов (ballean) метрических и более общих пространств (см., например, [4], [5]). В метрическом случае боллеан — это просто совокупность шаров пространства и исследование боллеанов очевидным образом связано с изучением класса отображений, сохраняющих свойство “быть шаром”.

В работе [6] изучался класс конечных ультраметрических пространств являющихся “экстремалиями” фундаментального неравенства Гомори-Ху. Для пространств (X, d) , (Y, ρ) из этого класса было доказано, что их представляющие деревья T_X и T_Y изоморфны тогда и только тогда, когда существует сохраняющее шары биективное отображение $F : X \rightarrow Y$. Таким образом, вопрос об изоморфизме боллеанов пространств X и Y оказался эквивалентным вопросу об изоморфизме корневых деревьев, получаемых путём “забывания” заданных на них весовых функций. В настоящей работе мы обобщаем этот результат на случай произвольных конечных ультраметрических пространств.

Напомним необходимые определения. Для конечного множества X через $|X|$ будем обозначать количество его элементов. Пусть (X, d) — метрическое пространство. Если метрика d удовлетворяет сильному неравенству треугольника

$$d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(z, y)\}$$

для всех $x, y, z \in X$, то она называется *ультраметрикой*, а пара (X, d) называется *ультраметрическим пространством*. В дальнейшем будем рассматривать только те пространства (X, d) , для которых $|X| \neq 0$. *Диаметром* метрического пространства (X, d) называется величина

$$\text{diam}X := \sup\{d(x, y) : x, y \in X\}.$$

Под *графом* мы понимаем пару (V, E) , состоящую из непустого множества V и (возможно пустого) множества E , элементы которого есть неупорядоченные пары различных точек из V . Для графа $G = (V, E)$ множество $V = V(G)$ называется *множеством вершин*, а $E = E(G)$ — *множеством рёбер*. Если элементами множества E являются упорядоченные пары $\langle x, y \rangle \in V \times V$, то $G = (V, E)$ — ориентированный граф (*орграф*).

Граф H является *подграфом* графа G , $H \subseteq G$, если $V(H) \subseteq V(G)$ и $E(H) \subseteq E(G)$. Граф G *конечен*, если $|V(G)| < \infty$. Если $E(G) = \emptyset$, то G — *пустой граф*. Конечный непустой граф $P \subseteq G$ называется *путём* (в G), если вершины из P можно без повторений занумеровать в последовательность (v_1, v_2, \dots, v_n) так, что $(\{v_i, v_j\} \in E(P)) \Leftrightarrow (|i - j| = 1)$.

Две вершины в графе *связаны*, если существует соединяющий их путь. *Связный граф* — граф, в котором все вершины связаны.

Деревом называется связный граф, не имеющий циклов. Выбранная вершина дерева называется *корнем дерева*. Дерево, содержащее такую вершину, называется *корневым деревом*. Вершину дерева иногда называют *узлом*. *Уровень узла* — длина пути от корня до узла, *m -й ярус* дерева — множество узлов дерева, на уровне m от корня дерева. *Потомками* данного узла будем называть все узлы последующего яруса, смежные с данным узлом. *Лист* дерева — вершина дерева инцидентная с единственным ребром. Если T — корневое дерево с единственным узлом, то мы считаем, что этот узел является листом. *Внутренний узел* — узел дерева, не являющийся листом. Два корневых дерева T_1 и T_2 называются *изоморфными*, если существует биекция $F : V(T_1) \rightarrow V(T_2)$, переводящая корень дерева T_1 в корень дерева T_2 и такая, что

$$(\{u, v\} \in E(T_1)) \Leftrightarrow (\{F(u), F(v)\} \in E(T_2))$$

для любых различных $u, v \in V(T_1)$.

Граф G называется *полным k -дольным*, если его вершины можно разбить на k непустых непересекающихся подмножества X_1, \dots, X_k так, что нет рёбер, соединяющих вершины одного и того же X_i , и две любые вершины из разных X_i, X_j , $1 \leq i, j \leq k$ смежны. В этом случае пишем $G = G[X_1, \dots, X_k]$.

Пусть (Y, \leq_Y) — конечное частично упорядоченное множество. Под *диаграммой Хассе* ч.у. множества (Y, \leq_Y) мы понимаем оргграф с множеством вершин Y и множеством дуг (ориентированных рёбер) $A_Y \subseteq Y \times Y$ таких, что пара $\langle v_1, v_2 \rangle$ принадлежит A_Y тогда и только тогда, когда $v_1 \leq_Y v_2$, $v_1 \neq v_2$ и импликация

$$(v_1 \leq_Y w \leq_Y v_2) \Rightarrow (v_1 = w \vee v_2 = w)$$

имеет место для любого $w \in Y$. Два оргграфа (Y, A_Y) и (X, A_X) являются *изоморфными*, если существует биекция $F : X \rightarrow Y$ такая, что

$$(\langle x, y \rangle \in A_X) \Leftrightarrow (\langle F(x), F(y) \rangle \in A_Y), \quad (1)$$

в этом случае F — изоморфизм оргграфов (Y, A_Y) и (X, A_X) . Любое корневое дерево T можно рассматривать как оргграф $(V(T), A_T)$, если положить

$$(\langle u, v \rangle \in A_T) \Leftrightarrow (u \text{ — потомок } v). \quad (2)$$

Следующие утверждения почти очевидны.

Утверждение 1. Пусть (X, \leq_X) , (Y, \leq_Y) — конечные ч.у. множества, (X, A_X) , (Y, A_Y) — соответствующие им диаграммы Хассе, $F : X \rightarrow Y$ — биекция. Отображение F является изоморфизмом ч.у. множеств (X, \leq_X) и (Y, \leq_Y) тогда и только тогда, когда оно является изоморфизмом оргграфов (X, A_X) и (Y, A_Y) .

В этом утверждении и далее изоморфизм ч.у. множеств понимаем в стандартном смысле (см., например, [7, стр. 44]).

Утверждение 2. Пусть T_1 и T_2 — конечные корневые деревья, $X = V(T_1)$, $Y = V(T_2)$ и (X, A_X) , (Y, A_Y) — орграфы, соответствующие T_1 и T_2 , $F : X \rightarrow Y$ — биекция. отображение F является изоморфизмом корневых деревьев T_1 и T_2 тогда и только тогда, когда оно является изоморфизмом орграфов (X, A_X) и (Y, A_Y) .

2 Представляющие деревья

Пусть (X, d) — ультраметрическое пространство. Диаметральным графом G_d будем называть граф, для которого

$$V(G_d) = X \text{ и } (\{u, v\} \in E(G_d)) \Leftrightarrow (d(u, v) = \text{diam}X).$$

Напомним, что в метрическом пространстве (X, d) замкнутым шаром радиуса r с центром в точке $t \in X$ называется множество

$$B_r(t) = \{x \in X : d(x, t) \leq r\}.$$

Для каждого $t \in X$ положим $\text{Sp}_t(X) := \{d(x, t) : x \in X\}$. Обозначим через \mathbf{B}_X множество всех шаров $B_r(t)$ с $r \in \text{Sp}_t(X)$, т.е.

$$\mathbf{B}_X = \{B_r(t) : t \in X, r \in \text{Sp}_t(X)\}.$$

Нам понадобится следующая теорема из [8]

Теорема 3. Пусть (X, d) — конечное ультраметрическое пространство с $|X| \geq 2$. Тогда $G_d = G_d[X_1, \dots, X_k]$, $k \geq 2$.

Для каждого $i = 1, \dots, k$ рассмотрим ультраметрические пространства (X_i, d) , где X_i — подмножество множества X из предыдущей теоремы с метриками, полученными сужением ультраметрики d на X_i . Пусть $d_i = \text{diam}X_i$ и $x_i \in X_i$. Очевидно, $d(x_i, y) \leq d_i < \text{diam}X$ для всех $y \in X_i$, а при $y \in X \setminus X_i$ имеем $d(x_i, y) = \text{diam}X > d_i$. Таким образом, выполнена следующая

Лемма 4. Пусть (X, d) — конечное ультраметрическое пространство с $|X| \geq 2$ и диаметральным графом $G_d[X_1, \dots, X_k]$. Тогда имеет место принадлежность $X_i \in \mathbf{B}_X$, $1 \leq i \leq k$.

Как это было сделано в [6], поставим каждому конечному ультраметрическому пространству (X, d) в соответствие помеченное корневое дерево T_X по следующему правилу. Если $X = \{x\}$ — одноточечное множество, то T_X — дерево, состоящее из одного узла, помеченного меткой

x , которое мы считаем корневым по определению. Пусть $|X| \geq 2$. Корень v_0 дерева пометим меткой $\bar{v}_0 = \text{diam}X$. Пусть G_d — диаметральный граф пространства (X, d) . По теореме 3 $G_d = G_d[X_1, \dots, X_k]$. В этом случае будем считать, что дерево T_X имеет k узлов v_1, v_2, \dots, v_k , лежащих на первом ярусе с метками

$$\bar{v}_i := \begin{cases} \text{diam}X_i, & \text{если } |X_i| \geq 2 \\ x, & \text{если } X_i \text{ — одноточечное множество} \\ & \text{с единственным элементом } x, \end{cases} \quad (3)$$

$i = 1, \dots, k$. Узлы первого яруса, помеченные метками $x \in X$, будут листьями, а метками $\text{diam}X_i$ — внутренними узлами дерева T_X . Если на первом ярусе внутренних узлов нет, то дерево T_X построено. В противном случае, повторяя описанную выше процедуру с пространствами (X_i, d) , соответствующими внутренним узлам первого яруса, получаем узлы второго яруса и т.д.. Так как $|X|$ конечно, то на каком-то из ярусов все вершины будут листьями и построение дерева T_X завершается.

Построенное выше помеченное корневое дерево T_X будем называть *представляющим деревом пространства (X, d)* . Отметим, что разным листьям соответствуют разные $x \in X$ и каждый элемент $x \in X$ приписан какому-то листу, но различные внутренние узлы могут иметь совпадающие метки. В дальнейшем изложении мы будем отождествлять листья дерева T_X с их метками, если это удобно.

Замечание 5. Пусть $|X| \geq 2$ и $(v_0, v_1, \dots, v_n, x_i)$ — путь от корня v_0 дерева T_X до произвольного листа x_i , тогда $\text{diam}X = \bar{v}_0 > \bar{v}_1 > \dots > \bar{v}_n$.

Следующая лемма была сформулирована в [6] для специального класса конечных ультраметрических пространств, но её доказательство справедливо для всех таких пространств.

Лемма 6. Пусть (X, d) — конечное ультраметрическое пространство и пусть x_1, x_2 — два различных листа дерева T_X . Тогда, если $(x_1, v_1, \dots, v_n, x_2)$ — путь, соединяющий листья x_1 и x_2 в T_X , то

$$d(x_1, x_2) = \max_{1 \leq i \leq n} \bar{v}_i. \quad (4)$$

Лемма 7. Пусть (X, d) — ультраметрическое пространство и $Y, Z \subseteq X$. Тогда, если $Y \in \mathbf{B}_X$ и $Z \in \mathbf{B}_Y$, то $Z \in \mathbf{B}_X$.

Доказательство. Выберем $y_1 \in Y$, $z_1 \in Z$ и $r_y, r_z \in [0, \infty)$ так, что $Y = \{x \in X : d(y_1, x) \leq r_y\}$ и $Z = \{y \in Y : d(z_1, y) \leq r_z\}$. Так как в ультраметрическом пространстве любая точка шара является его центром, то

$$Y = \{x \in X : d(z_1, x) \leq r_y\}. \quad (5)$$

Диаметры шаров из \mathbf{B}_X и \mathbf{B}_Y совпадают с их радиусами, значит

$$r_y = \text{diam} Y, \quad r_z = \text{diam} Z, \quad (6)$$

а так как $Z \subseteq Y$, то из (6) следует

$$r_y \geq r_z. \quad (7)$$

Принадлежность $Z \in \mathbf{B}_X$ равносильна тому, что

$$Z = \{x \in X : d(x, z_1) \leq r_z\}. \quad (8)$$

Включение $Z \subseteq \{x \in X : d(x, z_1) \leq r_z\}$ очевидно, поэтому достаточно доказать обратное включение. Пусть $x_0 \in X$ и $d(z_1, x_0) \leq r_z$. Тогда в силу (7) и (5) имеем $x_0 \in Y$. Отсюда и неравенства $d(z_1, x_0) \leq r_z$ следует, что $x_0 \in Z$. Равенство (8) доказано. \square

Определение 8. Пусть T — конечное корневое дерево с корнем v_0 . Для каждой вершины $v \in V(T)$ определим подграф T^v следующим образом. Если $v = v_0$, то $T^v := T$, Если $v \neq v_0$, то пусть u — единственная вершина T такая, что v — потомок u . Рассмотрим $G \subseteq T$ с

$$V(G) := V(T) \text{ и } E(G) := E(T) \setminus \{u, v\}.$$

Граф G представляет собой лес, состоящий из двух деревьев. T^v — то из этих деревьев, которое содержит v .

Пусть как в определении 8 T — конечное корневое дерево с корнем v_0 . Обозначим через L_v множество листьев графа T^v . Легко показать, что $L_v \subseteq L$, где L — множество листьев графа T . Рассмотрим многозначное отображение

$$\Gamma_T : V(T) \rightarrow 2^L \quad (9)$$

такое, что $\Gamma_T(v) = L_v$ для $v \in V(T)$. Заметим, что если v — лист дерева T , то $\Gamma_T(v) = \{v\}$, где $\{v\}$ — одноточечное множество, состоящее из единственного элемента v .

Исследуем отображение Γ_T в случае когда T является представляющим деревом конечного ультраметрического пространства X .

Лемма 9. Пусть (X, d) — конечное ультраметрическое пространство с представляющим деревом T_X , $|X| \geq 2$. Тогда

- (i) отображение $\Gamma_{T_X} : V(T_X) \rightarrow 2^X$ является инъективным,
- (ii) для любого $v \in V(T_X)$ имеет место принадлежность $\Gamma_{T_X}(v) \in \mathbf{B}_X$,
- (iii) для любого $\tilde{B} \in \mathbf{B}_X$ существует узел \tilde{v} такой, что $\Gamma_{T_X}(\tilde{v}) = \tilde{B}$.

Доказательство. Инъективность Γ_{T_X} и принадлежность $\Gamma_{T_X}(v) \in \mathbf{B}_X$ следует из леммы 7, леммы 4 и приведённого выше построения представляющего дерева T_X . Покажем, что для любого $\tilde{B} = \{x_1, \dots, x_k\} \in \mathbf{B}_X$ найдётся узел $\tilde{v} \in V(T_X)$ такой, что $\Gamma_{T_X}(\tilde{v}) = \tilde{B}$. При $k = 1$ это очевидно, поэтому считаем $k \geq 2$. Положим $b := \max\{d(x, y), x, y \in \tilde{B}\}$ и пусть $b = d(x_i, x_j)$. Т.к. \tilde{B} — это шар в ультраметрическом пространстве, то он совпадает с множеством $\{x \in X : d(x, x_i) \leq b\}$. Пусть $(x_i, v_1, \dots, v_n, x_j)$ — путь, соединяющий листья x_i и x_j в T_X . По лемме 6 $b = d(x_i, x_j) = \max_{1 \leq i \leq n} \bar{v}_i$. В силу замечания 5, узел \tilde{v} , помеченный меткой b , будет узлом наименьшего яруса среди узлов v_i . Рассмотрим корневое поддерево $T_X^{\tilde{v}}$ дерева T_X . Покажем, что множество листьев $L_{\tilde{v}}$ поддерева $T_X^{\tilde{v}}$ совпадает с множеством \tilde{B} . Пусть $x \in L_{\tilde{v}}$. Рассмотрим путь $(x, v_1, \dots, v_n, x_i)$. Очевидно, что $d(x, x_i) = \max_{1 \leq i \leq n} \bar{v}_i \leq b$. Следовательно, $x \in \tilde{B}$. Обратно, пусть $x \in \tilde{B}$ и предположим, что $x \notin L_{\tilde{v}}$. Рассмотрим путь $(x, v_1, \dots, v_n, x_i)$ в T_X , соединяющий x и x_i . Тогда вершина \tilde{v} является потомком одной из вершин v_i этого пути, что даёт неравенство $b < \bar{v}_i$. Следовательно, $d(x, x_i) = \max_{1 \leq i \leq n} \bar{v}_i > b$, что противоречит принадлежности $x \in \tilde{B}$. \square

Корневое дерево с корнем v_0 (см. (3)), получающееся из T_X путём “стирания меток” будем обозначать через \bar{T}_X .

Лемма 10. Пусть (X, d) — конечное ультраметрическое пространство, $u, v \in V(\bar{T}_X)$, $u \neq v$. Узел u является потомком узла v тогда и только тогда, когда

$$\Gamma_{\bar{T}_X}(u) \subseteq \Gamma_{\bar{T}_X}(v) \quad (10)$$

и импликация

$$(\Gamma_{\bar{T}_X}(u) \subseteq \Gamma_{\bar{T}_X}(w) \subseteq \Gamma_{\bar{T}_X}(v)) \Rightarrow (\Gamma_{\bar{T}_X}(u) = \Gamma_{\bar{T}_X}(w)) \vee (\Gamma_{\bar{T}_X}(w) = \Gamma_{\bar{T}_X}(v)) \quad (11)$$

выполняется для любого $w \in V(\bar{T}_X)$.

Доказательство этой леммы достаточно просто и мы его опускаем.

Из лемм 9 и 10 выводится

Следствие 11. Пусть (X, d) — конечное ультраметрическое пространство. Если на \mathbf{B}_X задать частичный порядок, индуцированный из частично упорядоченного множества $(2^X, \subseteq)$, то диаграмма Хассе ч.у. множества $(\mathbf{B}_X, \subseteq)$ изоморфна орграфу $(V(\bar{T}_X), A_{\bar{T}_X})$.

3 Отображение, сохраняющее шары

Сформулируем центральное для этой работы

Определение 12. Пусть X и Y — метрические пространства. Отображение $F : X \rightarrow Y$ сохраняет шары, если для любых $Z \in \mathbf{B}_X$ и $W \in \mathbf{B}_Y$ выполнены соотношения

$$F(Z) \in \mathbf{B}_Y \text{ и } F^{-1}(W) \in \mathbf{B}_X, \quad (12)$$

где $F(Z)$ — образ множества Z при отображении F и $F^{-1}(W)$ — прообраз множества W при этом отображении.

Отметим, что для любого биективного отображения $F : X \rightarrow Y$ и любых подмножеств X_1, X_2 множества X включение $X_1 \subseteq X_2$ имеет место тогда и только тогда, когда $F(X_1) \subseteq F(X_2)$. Следовательно справедлива следующая

Лемма 13. Пусть X, Y — метрические пространства и $F : X \rightarrow Y$ — сохраняющее шары биективное отображение. Тогда для любых $B_1, B_2 \in \mathbf{B}_X$ имеет место эквивалентность

$$(B_1 \subseteq B_2) \Leftrightarrow (F(B_1) \subseteq F(B_2)).$$

Следствие 14. Пусть X, Y — метрические пространства и $F : X \rightarrow Y$ — сохраняющее шары биективное отображение. Тогда отображение

$$(\mathbf{B}_X, \subseteq) \ni B \mapsto F(B) \in (\mathbf{B}_Y, \subseteq)$$

есть изоморфизм ч.у. множеств $(\mathbf{B}_X, \subseteq)$ и $(\mathbf{B}_Y, \subseteq)$.

Теорема 15. Пусть X, Y — конечные ультраметрические пространства. \overline{T}_X и \overline{T}_Y изоморфны как корневые деревья тогда и только тогда, когда существует сохраняющее шары биективное отображение $\Phi : X \rightarrow Y$.

Доказательство. Теорема тривиальна при $|X| = 1$, поэтому будем считать, что $|X| \geq 2$. Пусть $V_X = V(\overline{T}_X)$ и $V_Y = V(\overline{T}_Y)$ — множества вершин графов \overline{T}_X и \overline{T}_Y соответственно. Предположим, что существует биективное отображение $\Psi : V_X \rightarrow V_Y$, сохраняющее отношение смежности между вершинами и переводящее корень дерева \overline{T}_X в корень дерева \overline{T}_Y . Биекция Ψ отображает множество листьев графа \overline{T}_X — множество X на множество листьев графа \overline{T}_Y — множество Y , так как листья — это в точности вершины степени 1. Обозначим через Φ сужение Ψ на X , $\Phi = \Psi|_X$, и покажем, что биективное отображение $\Phi : X \rightarrow Y$, рассматриваемое как отображение между ультраметрическими пространствами (X, d) и (Y, ρ) , сохраняет шары.

Пусть $B \in \mathbf{B}_X$. Покажем что

$$\Phi(B) \in \mathbf{B}_Y \quad (13)$$

В силу леммы 9 существует узел v дерева \bar{T}_X , для которого B совпадает с множеством листьев L_v графа \bar{T}_X^v , где \bar{T}_X^v — поддерево дерева \bar{T}_X задаваемое определением 8. Так как Ψ — изоморфизм, то образом дерева \bar{T}_X^v является какое-то поддерево T' дерева \bar{T}_Y . Пусть $u = \Psi(v)$ и \bar{T}_Y^u — поддерево дерева \bar{T}_Y , построенное для u в соответствии с определением 8. Так как при изоморфизме Ψ корень дерева \bar{T}_X переходит в корень дерева \bar{T}_Y , то используя определение 8, легко установить равенство $T' = \bar{T}_X^u$. Сужение Ψ на $V(\bar{T}_X^v)$ является изоморфизмом деревьев \bar{T}_X^v и \bar{T}_Y^u . При изоморфизме множество листьев переходит в множество листьев. Пусть L_u — множество листьев дерева \bar{T}_Y^u . Тогда

$$L_u = \Psi|_{V(\bar{T}_X^v)}(L_v) = \Psi(L_v). \quad (14)$$

Так как $L_v \subseteq X$, а $\Phi = \Psi|_X$, то из (14) получаем

$$L_u = \Phi(L_v) = \Psi(B). \quad (15)$$

По лемме 9 имеем $L_u \in \mathbf{B}_Y$. Отсюда и из (15) следует (13). Аналогично устанавливается, что

$$\Phi^{-1}(Z) \in \mathbf{B}_X$$

для любого $Z \in \mathbf{B}_Y$. Таким образом, из того, что \bar{T}_X и \bar{T}_Y изоморфны как корневые деревья следует, что Φ — сохраняющая шары биекция.

Пусть теперь $\Phi : X \rightarrow Y$ сохраняющая шары биекция. Нужно доказать, что \bar{T}_X и \bar{T}_Y изоморфны как корневые деревья. Пусть (Y, A_Y) , (X, A_X) — диаграммы Хассе ч.у. множеств $(\mathbf{B}_Y, \subseteq)$, $(\mathbf{B}_X, \subseteq)$ и пусть $(V(\bar{T}_Y), A_{\bar{T}_Y})$, $(V(\bar{T}_X), A_{\bar{T}_X})$ орграфы, соответствующие \bar{T}_Y , \bar{T}_X . В соответствии со следствием 11, (X, A_X) и $(V(\bar{T}_X), A_{\bar{T}_X})$ — изоморфны как ориентированные графы, аналогично, орграфы (Y, A_Y) и $(V(\bar{T}_Y), A_{\bar{T}_Y})$ тоже изоморфны. Используя утверждение 1 и следствие 14, убеждаемся в изоморфизме орграфов (Y, A_Y) и (X, A_X) . Следовательно орграфы $(V(\bar{T}_X), A_{\bar{T}_X})$ и $(V(\bar{T}_Y), A_{\bar{T}_Y})$ тоже изоморфны. Последнее по утверждению 2 равносильно изоморфности корневых деревьев \bar{T}_X и \bar{T}_Y . \square

Рассуждения, аналогичные проведённым во второй части доказательства теоремы 15, показывают, что \bar{T}_X и \bar{T}_Y изоморфны как корневые деревья тогда и только тогда, когда изоморфны ч.у. множества $(\mathbf{B}_X, \subseteq)$ и $(\mathbf{B}_Y, \subseteq)$. Таким образом, имеет место

Следствие 16. Пусть X и Y — конечные ультраметрические пространства. Ч.у. множества $(\mathbf{B}_X, \subseteq)$ и $(\mathbf{B}_Y, \subseteq)$ изоморфны тогда и только тогда, когда существует сохраняющая шары биекция $\Phi : X \rightarrow Y$.

Список литературы

- [1] A. J. Lemin, On Gelfand's Problem concerning graphs, lattices, and ultrametric spaces. Workshop on General Algebra, Johannes Kepler University Linz, Department of Algebra, Stochastics, and Knowledge Based Mathematical Systems, Linz, Austria, June 14-17, 2001.
- [2] A. J. Lemin, The category of ultrametric spaces is isomorphic to the category of complete, atomic, tree-like, and real graduated lattices LAT^* , *Algebra Universalis* 50 (1) (2003) 35–49.
- [3] V. Gurvich and M. Vyalyi. Characterizing (quasi-)ultrametric finite spaces in terms of (directed) graphs. *Discrete Appl. Math.*, 160(12):1742–1756, 2012.
- [4] I. Protasov, T. Banakh. Ball Structures and Colorings of Graphs and Groups. Math. Stud. Monogr. Ser. 11, VNTL Publishers, Lviv, 2003
- [5] I. Protasov, M. Zarichnyi. General asymptology. Mathematical Studies Monograph Series, 12. VNTL Publishers, Lviv, 2007. 219 pp.
- [6] Е. А. Петров и А. А. Довгошей. О неравенстве Гомори-Ху, <http://arxiv.org/abs/1211.2389>.
- [7] О. В. Мельников, В. Н. Ремесленников, В. А. Романьков, Л. А. Скорняков, И. П. Шестаков. Общая алгебра. - М.: Наука, 1990. - 592 с.
- [8] D. Dordovskyi, O. Dovgoshey, and E. Petrov. Diameter and diametrical pairs of points in ultrametric spaces. *P-adic Numbers, Ultrametric Analysis and Applications*, 3(4):253–262, 2011.